一种基于 Walsh 函数生成的杂交桥函数*

李 岩 常 青** 张其善
北京航空航天大学电子信息工程学院, 北京 100191

摘要 从作用矩阵的角度重新理解 Walsh 函数和桥函数的本质并统一它们的表达式. 在定义杂交矩阵的基础上构造一种新型三值函数并命名为杂交桥函数, 该函数矩阵的行向量来自 Walsh 函数矩阵和桥函数矩阵的行向量. 由此提出了一种新的函数序列生成方法, 取杂交桥函数的列向量作为新的函数序列. 该函数序列可以灵活调整序列中零的个数, 解决了由于桥函数序列中零的个数过多而限制其应用的问题, 同时极大地扩充了函数序列的研究范围. 严格的数学分析证明当父母矩阵的初始矩阵阶数和杂交矩阵相似度满足一定条件时杂交桥函数具有较好的正交特性, 为其进一步在通信系统中的应用提供了理论参考.

关键词 复制理论 **Walsh** 函数 桥函数 杂交桥函数

正交函数是通信工程的数学基础之一. 长期以来, 正余弦函数系作为完备正交函数系在信号分解和副载波传输中发挥着重要作用, 在通信领域中占据统治地位. 随着集成电路技术和数字计算机的快速发展, 数字化通信系统为以 Walsh 函数为代表的非正弦正交函数的研究开拓了新的道路, 1969 年 Harmuth 在 IEEE“SPECTRUM”上发表的 Walsh 函数在通信中的应用一文[1], 在通信界引起了普遍的重视. 90 年代初, 随着 CDMA 技术的兴起, Walsh 函数作为扩频码先后在 IS-95 和 CDMA2000 的技术标准中得到应用. 桥函数[2] 作为一种更一般形式的非正弦正交函数在 1982 年国际遥测会议上首次提出即引起了许多学者的关注, 自 1983 年在 IEEE. Trans. EMC 上发表论文《桥函数导论》[3] 以来, 桥函数从理论完善和实际应用都取得了巨大突破. 桥函数是在研究 Walsh 函数复制理论基础上提出来的, 它介于 Walsh 函数和方块脉冲函数之间, 不仅包含 Walsh, Haar, Her, Ter, 方块脉冲函数, 还包含很多其他三值正交函数系, 它们具有很多有用的特性. 文献[4] 中深入研究了桥函数的相关函数, 为其应用于通信系统奠定了数学基础. 如何在移动通信系统中应用并和 OFDM 等关键技术结合成为现在桥函数发展过程中的重要研究方向[5]. 但是由于桥函数序列中零的个数比较固定并相对较多, 使得其在应用过程中具有一定的局限性. 为了能够灵活调整序列中零的个数, 使其更好地应用于通信系统中去, 本文提出了一种基于 Walsh 函数和桥函数的新型三值函数序列生成方式, 将两种函数写成矩阵形式后按一定规则通过替换行向量后取列向量的方式生成新的序列, 并把这种新的函数序列命名为杂交桥函数序列.

这种 Walsh 函数和桥函数之间的序列杂交能够在灵活调整序列中零的个数的同时保证序列较好的正交特性, 并且极大扩充了函数序列的研究范围. 杂交桥函数的提出, 不仅在理论上进一步发展了桥函数理论, 同时具有很好的应用价值和前景.

1 桥函数的分类和矩阵表示

为了更好地应用复制生成理论研究 Walsh 函数和桥函数, 一般用离散形式的函数序列表示这两种

2008-07-07 收稿, 2008-08-24 收修改稿
* 国家自然科学基金(批准号: 60372018, 60872062)和航空基金(批准号: 2006ZC51032)资助项目
** 通信作者, E-mail: changq@263.net

函数，将函数序列按其序号的顺序自小至大地按行放置在矩阵中构成函数矩阵．矩阵形式在数学上更容易分析应用．

离散型桥函数由复制和移位两种序列生成方式共同生成．当只有复制生成方式时序列为 Walsh 序列，只有移位生成方式时序列为方块脉冲序列．下面以＋1 为初始序列举例说明：

若给定整数 m，将 m 的 q 位二进制自然码 $(m_{q-1}, m_{q-2}, \cdots, m_1, m_0)$ 作为生成信息，其中 $m_i \in \{0, 1\}$，$i = 0, 1, \cdots, q-1$，将其分成两部分：

$$\overline{\overline{m}} = (m_{q-1}, m_{q-2}, \cdots, m_k), \overline{m} = (m_{k-1}, \cdots, m_1, m_0)$$

根据复制和移位信息的选取和先后顺序，可以得到两类 4 种不同的桥函数，如表 1 所示．

表 1　桥函数的分类

类别	$\overline{\overline{m}}$	$\overline{m}$	桥函数序列名称	矩阵表示
第一类	复制信息	移位信息	第一类先移位后复制的桥函数	$[\mathbf{Bri}^{1}{}_{q,k}]$
←	移位信息	复制信息	第一类先复制后移位的桥函数	$[\mathbf{Bri}^{1}{}_{q,k}]$
第二类	移位信息	复制信息	第二类先移位后复制的桥函数	$[\mathbf{Bri}^{2}{}_{q,k}]$
→	复制信息	移位信息	第二类先复制后移位的桥函数	$[\mathbf{Bri}^{2}{}_{q,k}]$

为了深入分析桥函数序列，不妨参考 Walsh 函数 4 种编号更加详细的划分桥函数的种类．

复制方式分为平移复制和对称复制两种，复制信息顺序分为由高位到低位的自然码序和由低位到高位的反写码序两种．将表 1 中的 4 种桥函数每一种都可以再细分成 4 小类，共可写出 16 个互不相同的桥函数矩阵．用字母 P 代表平移复制方式，W 代表对称复制方式，Z 代表自然码序，F 代表反写码序．用下标 P_Z 和 P_F 分别表示平移复制方式下自然码和反写码作为复制信息；下标 W_Z 和 W_F 分别表示对称复制方式下自然码和反写码作为复制信息．16 个桥函数矩阵具体表示如下：

$$\begin{array}{cccc}
[\mathbf{Bri}^{1}_{P_Z\,q,k}] & [\mathbf{Bri}^{1}_{W_Z\,q,k}] & [\mathbf{Bri}^{1}_{P_Z\,q,k}] & [\mathbf{Bri}^{1}_{W_Z\,q,k}] \\
[\mathbf{Bri}^{2}_{P_Z\,q,k}] & [\mathbf{Bri}^{2}_{W_Z\,q,k}] & [\mathbf{Bri}^{2}_{P_Z\,q,k}] & [\mathbf{Bri}^{2}_{W_Z\,q,k}] \\
[\mathbf{Bri}^{1}_{P_F\,q,k}] & [\mathbf{Bri}^{1}_{W_F\,q,k}] & [\mathbf{Bri}^{1}_{P_F\,q,k}] & [\mathbf{Bri}^{1}_{W_F\,q,k}] \\
[\mathbf{Bri}^{2}_{P_F\,q,k}] & [\mathbf{Bri}^{2}_{W_F\,q,k}] & [\mathbf{Bri}^{2}_{P_F\,q,k}] & [\mathbf{Bri}^{2}_{W_F\,q,k}]
\end{array}$$

文章后面着重分析了$[\mathbf{Bri}^{1}_{P_F\,q,k}]$ 和$[\mathbf{Bri}^{1}_{W_F\,q,k}]$ 这两个函数矩阵的形式和结构．

2　研究基础

2.1　桥函数序列的性质

根据桥函数的定义，可以计算得到桥函数序列中零元素的个数．

结论 1　q 位二进制自然码作为桥函数序列的生成信息，若其中有 k 位作为复制信息 $(k < q)$，则桥函数序列中非零元素的个数为 2^k．

推论 1　除 Walsh 函数外，q 位二进制自然码作为生成信息的桥函数序列中，零元素的个数最少为 2^{q-1}，当且仅当移位信息位数取 1 位时．

由推论 1 可以看出，桥函数序列中至少有一半是零．

桥函数序列的实质是将复制（平移和对称）和移位这两种序列生成方法相结合，如果只使用其中的一种生成方法就得到桥函数的两个极端特例：Walsh 函数和离散方块脉冲函数．如果把只是函数序列序号顺序不同的函数矩阵当做同一个函数矩阵，下面结论阐述了处于两个极端状态的函数之间的中间状态桥函数矩阵和桥函数序列的个数．

结论 2　由 q 位二进制自然码作为桥函数序列生成信息，一共可以产生 $3(q-1)$ 个大小为 $2^q \times 2^q$ 的桥函数矩阵，即能产生 $3(q-1) \times 2^q$ 个两两不同的桥函数序列．

结论2 可以通过分析 16 个桥函数矩阵并把仅仅是函数序列序号不同的函数矩阵合并后得到．

结论 1 和结论 2 分别指出桥函数序列中零的个数和桥函数矩阵和桥函数序列的个数，文章稍后提出的杂交桥函数从这两个方面突破了桥函数序列的限制．

2.2　Walsh 函数和桥函数的作用矩阵表示形式

H 编号的 Walsh 函数矩阵称为 Hadamard 矩阵，N 阶 Hadamard 矩阵记作 $[\boldsymbol{H}_N]$；X 编号的 Walsh 函数矩阵称为爱克斯矩阵，N 阶爱克斯矩阵记作 $[X_N]$[4]．

结论 3

$$[\boldsymbol{H}_{2N}]=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{H}_N] & [\boldsymbol{H}_N]\\ [\boldsymbol{H}_N] & -[\boldsymbol{H}_N]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e[\boldsymbol{H}_N] & e[\boldsymbol{H}_N]\\ e[\boldsymbol{H}_N] & -e[\boldsymbol{H}_N]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e & e\\ e & -e\end{bmatrix}\otimes[\boldsymbol{H}_N]=[\boldsymbol{E}_2]\otimes[\boldsymbol{H}_N] \tag{1}$$

$$[\boldsymbol{X}_{2N}]=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{X}_N] & [\overline{\boldsymbol{X}_N}]\\ [\boldsymbol{X}_N] & -[\overline{\boldsymbol{X}_N}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e[\boldsymbol{H}_N] & \bar{e}[\boldsymbol{H}_N]\\ e[\boldsymbol{H}_N] & -\bar{e}[\boldsymbol{H}_N]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e & \bar{e}\\ e & -\bar{e}\end{bmatrix}\otimes[\boldsymbol{X}_N]=[\overline{\boldsymbol{E}}_2]\otimes[\boldsymbol{X}_N] \tag{2}$$

其中：e 表示保持原矩阵作用符，e 与某矩阵相乘后得到该矩阵本身；$-e$ 表示负矩阵作用符，$-e$ 与某矩阵相乘后得到该矩阵的负矩阵；$\bar{e}$表示逆矩阵作用符，$\bar{e}$与某矩阵相乘后得到的新矩阵行向量和原矩阵对应行向量互为逆序列；$-\bar{e}$表示逆负矩阵作用符，$-\bar{e}$与某矩阵相乘后得到的新矩阵行向量和原矩阵对应行向量互为逆负序列．$[\boldsymbol{E}_2]$ 和 $[\overline{\boldsymbol{E}}_2]$ 为作用矩阵．其中 $[\boldsymbol{E}_2]$ 中作用符 e 相当于 1，$-e$ 相当于-1，关系不会发生变化，即将 $[\boldsymbol{E}_2]$ 记做 $[\boldsymbol{H}_2]$ 结果不变，同时将 $[\overline{\boldsymbol{E}}_2]$ 记作 $[\boldsymbol{G}_2]$，有如下推论．

推论 2　q 位 Walsh 函数序列的复制信息为$(m_{q-1}, m_{q-2}, \cdots, m_1, m_0)$，$k$ 为小于 q 的整数，则有：

$$[\boldsymbol{H}_{2^q}]=\underbrace{[\boldsymbol{H}_2]\otimes[\boldsymbol{H}_2]\otimes\cdots\otimes[\boldsymbol{H}_2]}_{q-k\text{个}}\otimes[\boldsymbol{H}_{2^k}]=[\boldsymbol{H}_{2^{q-k}}]\otimes[\boldsymbol{H}_{2^k}] \tag{3}$$

$$[\boldsymbol{X}_{2^q}]=\underbrace{[\boldsymbol{G}_2]\otimes[\boldsymbol{G}_2]\otimes\cdots\otimes[\boldsymbol{G}_2]}_{q-k\text{个}}\otimes[\boldsymbol{X}_{2^k}] \tag{4}$$

对 16 个具体的桥函数矩阵形式进行深入分析，发现其中两个矩阵同样可以用作用矩阵的形式表示，得到如下结论．

结论 4　q 位第一类先移位后复制桥函数序列的生成信息$(m_{q-1}, m_{q-2}, \cdots, m_1, m_0)$中 k 位$(k<q)$移位信息为$(m_{k-1}, \cdots, m_1, m_0)$，则有：

$$[\mathbf{Bri}^1_{P_F q,k}]=\underbrace{[\boldsymbol{H}_2]\otimes[\boldsymbol{H}_2]\otimes\cdots\otimes[\boldsymbol{H}_2]}_{q-k\text{个}}\otimes\boldsymbol{I}_{2^k}=[\boldsymbol{H}_{2^{q-k}}]\otimes\boldsymbol{I}_{2^k} \tag{5}$$

$$[\mathbf{Bri}^1_{W_F q,k}]=\underbrace{[\boldsymbol{G}_2]\otimes[\boldsymbol{G}_2]\otimes\cdots\otimes[\boldsymbol{G}_2]}_{q-k\text{个}}\otimes\boldsymbol{I}_{2^k} \tag{6}$$

小结　q 位生成信息的 Walsh 函数矩阵 $[\boldsymbol{H}_{2^q}]$ 和桥函数矩阵$[\mathbf{Bri}^1_{P_F q,k}]$都可以被看成作用矩阵 $[\boldsymbol{E}_2]$ 作用于初始矩阵 $q-k$ 次后的结果，其中 $[\boldsymbol{H}_{2^q}]$ 初始矩阵为 $[\boldsymbol{H}_{2^k}]$，$[\mathbf{Bri}^1_{P_F q,k}]$ 初始矩阵为 $\boldsymbol{I}_{2^k}$；同样地，$[\boldsymbol{X}_{2^q}]$ 和桥函数$[\mathbf{Bri}^1_{W_F q,k}]$都可以被看成作用矩阵 $[\overline{\boldsymbol{E}}_2]$ 作用于初始矩阵 $q-k$ 次后的结果，其中 $[\boldsymbol{X}_{2^q}]$ 初始矩阵为 $[\boldsymbol{X}_{2^k}]$，$[\mathbf{Bri}^1_{W_F q,k}]$ 的初始矩阵为$\boldsymbol{I}_{2^k}$．这种作用矩阵对初始矩阵的作用生成方式如果从分块矩阵的角度理解不难看出 Walsh 函数矩阵和桥函数矩阵具有相同的分块矩阵的结构．

作用矩阵 $[\boldsymbol{E}_2]$ 和 $[\overline{\boldsymbol{E}}_2]$ 本质上分别代表平移复制和对称复制两种复制生成方式，其中平移复制的结果可以表示成低阶 H 编号 Walsh 矩阵和初始矩阵直接做 Kronecker 积的结果，而对称复制则无此形式的结论．通过作用矩阵的概念统一了 Walsh 函数和桥函数的表示，为后续概念的提出提供了理论依据和基础．

3　杂交桥函数

在上述铺垫性的研究工作基础上，文章通过定义杂交矩阵提出了杂交桥函数的概念并给出了其简单性质．

3.1　杂交矩阵的定义

定义 1　将两个阶数相同的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 按照相同方法按行分块，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$．构造矩阵 $\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{C}_i$ 选取 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{B}_i$ 中的某一个，则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 行杂交矩阵，简称杂交矩阵．$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 称为杂交矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的父母矩阵．

由杂交矩阵的定义不难得到如下结论．

定理 1　父母矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 按照相同方法分成 k 块，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的杂交矩阵的个数为 2^k．

下面给出杂交矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和它的父母矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似度的概念．

定义 2　用 $\mathrm{card}(K)$表示集合 K 中元素的个数．定义 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的相似度为 $\mathrm{card}(M_C^A)$，其中 $M_C^A=\{\boldsymbol{C}_i \mid \boldsymbol{C}_i=\boldsymbol{A}_i,\ i=1, 2, \cdots, k\}$．$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的相似度

为 card(M_C^B)，其中 $M_C^B=\{C_i \mid C_i=B_i,\ i=1,2,\cdots,k\}$.

由定义2很容易得到如下结论.

定理2 card(M_C^A)+card(M_C^B)=k (7)

3.2 桥函数和 Walsh 函数之间的杂交

2.2节研究表明：4种 Walsh 编号中的两种函数矩阵和16个桥函数矩阵中的两个可以看成是一个初始矩阵经作用矩阵作用相同次数的结果，不同的仅仅是它们的初始矩阵.

定义3 把经过相同作用矩阵得到的 Walsh 函数矩阵和桥函数矩阵作为父母矩阵进行杂交，具体杂交对应规则如表2所示. 这样杂交生成的函数矩阵称为杂交桥函数矩阵.

表2 杂交矩阵对应表

函数类别	平移复制矩阵形式	对称复制矩阵形式
桥函数	$[\mathbf{Bri}^1_{P_F q,k}]$	$[\mathbf{Bri}^1_{W_F q,k}]$
Walsh 函数	$[\boldsymbol{H}_{2^q}]$	$[\boldsymbol{X}_{2^q}]$

下面的定理从杂交矩阵行向量和列向量的角度去分析它的性质. 研究表明：在对父母矩阵采用一定的行划分方式下，杂交桥函数矩阵的行列向量都具有较好的正交性. 如果选取杂交桥函数矩阵的列向量可以产生新型三值函数序列，并可以改变序列中零的个数.

定理3 记 q 位 Walsh 函数和桥函数序列的生成信息，其中桥函数有 k 位移位信息. 若将桥函数矩阵 A 和 Walsh 函数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 同时按如下分块方式对行进行划分 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_{2^{q-k}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{B}_{2^{q-k}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，所有 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{B}_i$ 阶数均为 $2^q\times 2^k$. 杂交桥函数矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 具有如下性质：

(1) $\boldsymbol{Z}$ 的所有行向量正交，即 $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}$ 除主对角线外其余元素全为0.

(2) $\boldsymbol{Z}$ 的每个列向量中含有零元素的个数相同，为 card(M_Z^A)×(2^k-1).

(3) 若将 $\boldsymbol{Z}$ 所有 2^q 个列向量相邻 2^k 列组成一个单元共 2^{q-k} 个单元，易知每个单元中的每一列的零元素位置均不相同，按零元素的位置将不同单元中位置相同的列向量组成一组共有 2^k 组. 则不同组的任何两个向量正交，同组间的任何两个向量内积绝对值不超过 $\min\{\text{card}(M_Z^A),\ \text{card}(M_C^B)\}\times(2^k-1)$.

证明 首先证明$[\mathbf{Bri}^1_{P_F q,k}]$ 和 $[\boldsymbol{H}_{2^q}]$ 杂交，即平移复制的情况.

(1) $[\mathbf{Bri}^1_{P_F q,k}] \triangleq \boldsymbol{A}$，$[\boldsymbol{H}_{2^q}] \triangleq \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{I}_{2^k} \triangleq \boldsymbol{A}^*$，$[\boldsymbol{H}_{2^k}] \triangleq \boldsymbol{B}^*$，$[\boldsymbol{H}_{2^{q-k}}] \triangleq \boldsymbol{C}$(符号 $\triangleq$ 表示记做). 由推论2和结论4可知，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{B}^*$.

首先不妨考虑 card(M_C^B)=1 的情况. 记 $m=2^{q-k}$，不妨用 $\boldsymbol{B}_i$ 替换 $\boldsymbol{A}_i$，分块矩阵形式如下：

$$\boldsymbol{Z}=\underbrace{\begin{bmatrix} c_{11}\boldsymbol{A}^* & c_{12}\boldsymbol{A}^* & \cdots & \cdots & c_{1m}\boldsymbol{A}^* \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots \\ c_{i1}\boldsymbol{B}^* & c_{i2}\boldsymbol{B}^* & \ddots & \ddots & c_{im}\boldsymbol{B}^* \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}\boldsymbol{A}^* & \cdots & \cdots & & c_{mm}\boldsymbol{A}^* \end{bmatrix}}_{2^{q-k}} \tag{8}$$

分别计算 $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}$ 主对角线和其他位置的元素.

主对角线元素：$m\times\boldsymbol{A}^*\times(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$ 或 $m\times\boldsymbol{B}^*\times(\boldsymbol{B}^*)^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A}^*\times(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}_{2^k}$，$\boldsymbol{B}^*\times(\boldsymbol{B}^*)^{\mathrm{T}}=2^k\times\boldsymbol{I}_{2^k}$.

其他位置的元素在非第 i 行和且非第 i 列的情况下与 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 结果相同，均为零.

第 i 行的元素：$\left(\sum_{k=1}^{m} c_{ik}c_{jk}\right)\boldsymbol{B}^*\times(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$

第 i 列的元素：$\left(\sum_{k=1}^{m} c_{ik}c_{jk}\right)\boldsymbol{A}^*\times(\boldsymbol{B}^*)^{\mathrm{T}}$.

由于 $\boldsymbol{C}$ 正交，$\sum_{k=1}^{m} c_{ik}c_{jk}=0$. 于是 $\boldsymbol{Z}$ 非主对角线元素全为零，主对角线元素为单位阵的整数倍，故 $\boldsymbol{Z}$ 的所有行向量正交. card(M_Z^B)=1 的情况得证. card(M_Z^B)=N 的情况同理可证.

(2) 这个结论比较显然，从分块矩阵的角度考虑不难得到.

(3) 首先证明不同组的列向量正交. 将不同组的任意两个列向量等分成 2^{q-k} 段后考虑其对应子段对. 不难发现每一子段对都是由 $\boldsymbol{A}^*$ 或 $\boldsymbol{B}^*$ 中的两个不同列向量分别乘以该分块位置的系数 c_{ij} (1或−1)得到的. 由于 $\boldsymbol{A}^*$ 和 $\boldsymbol{B}^*$ 都是正交矩阵，不同列向量正交，故所有对应子段对正交，不同组列向量亦正交.

对于同组列向量的情况，思考方法和不同组时

类似，同样采取分段后从分块矩阵的角度分析．将同组列向量等分成 2^{q-k} 段，每段长度为 2^k，由相似度的定义可得每个列向量都是由 $n=\mathrm{card}(M_Z^A)$ 段 $\boldsymbol{A}^*$ 和 $m=\mathrm{card}(M_Z^A)$ 段 $\boldsymbol{B}^*$ 的某一列乘以分块位置的系数 c_{ij}（1 或－1)组合得到的，且系数之间满足正交性，即

$$\sum_{i=1}^{2^{q-k}} c_{ij} \times c_{i(j+l\times 2^k)} = 0 \tag{9}$$

现不妨设 a_1，a_2，$\cdots a_n$，b_1，$b_2 \cdots b_m$ 为闭区间 $[1,\ 2^{q-k}]$ 内互不相同的整数，a_k 和 b_k 分别代表 $\boldsymbol{A}^*$ 和 $\boldsymbol{B}^*$ 所处行的行序号，则可计算同组两个列向量的内积为

$$\sum_{r=1}^{n} c_{a_r j} \times c_{a_r(j+l\times 2^k)} \times 2^k + \sum_{r=1}^{m} c_{b_r j} \times c_{b_r(j+l\times 2^k)} \times 1 \triangleq h \tag{10}$$

由(9)式可知

$$\sum_{r=1}^{n} c_{a_r j} \times c_{a_r(j+l\times 2^k)} = -\sum_{r=1}^{m} c_{b_r j} \times c_{b_r(j+l\times 2^k)} \tag{11}$$

将(11)式代入(10)式得内积表达式为

$$\begin{aligned} h &= \sum_{r=1}^{n} c_{a_r j} \times c_{a_r(j+l\times 2^k)} \times (2^k - 1) = \\ &- \sum_{r=1}^{m} c_{b_r j} \times c_{b_r(j+l\times 2^k)} \times (2^k - 1) \end{aligned} \tag{12}$$

若记 $\left|\sum_{r=1}^{n} c_{a_r j} \times c_{a_r(j+l\times 2^k)}\right| = \left|\sum_{r=1}^{m} c_{b_r j} \times c_{b_r(j+l\times 2^k)}\right| \triangleq d$，则 $h=d\times(2^k-1)$．下面估计 d 的大小．

当 n 和 m 都是奇数的时候，d 为闭区间 $[1,\ \min\{n,\ m\}]$ 内的奇数；当 n 和 m 都是偶数的时候，d 为闭区间 $[0,\ \min\{n,\ m\}]$ 内的偶数．

至此，平移复制的情况证明完毕．

在证明 $[\mathbf{Bri}_{W_F q,k}]$ 和 $[\boldsymbol{X}_{2^q}]$ 杂交，即对称复制的情况之前，有必要从分块矩阵的角度理解推论 2 和结论 4 的含义并比较平移复制和对称复制的区别和联系．

对称复制的情况虽然无法写成两个低阶矩阵直接做 Kronecker 积的形式，但和平移复制一样都是把初始矩阵通过作用矩阵不断作用的方式生成，其中桥函数的初始矩阵为 $\boldsymbol{I}_{2^k}$，Walsh 函数的初始矩阵为 $[\boldsymbol{X}_{2^k}]$，作用矩阵为 $[\overline{\boldsymbol{E}}_2]$．这种方式保证了桥函数矩阵和 Walsh 函数矩阵同样地可以用 $2^{q-k}\times 2^{q-k}$ 块每块大小 $2^k\times 2^k$ 的分块矩阵表示．

平移复制方式的作用矩阵为 $[\boldsymbol{E}_2]$，每个分块有初始矩阵本身和负矩阵两种形式；对称复制方式的作用矩阵为 $[\overline{\boldsymbol{E}}_2]$，每个分块有初始矩阵本身、逆矩阵和逆负矩阵 3 种形式．

若将每个分块矩阵相对于初始矩阵的符号提取后写成由 1 和－1 组成的符号矩阵，则平移复制方式的符号矩阵为 $[\boldsymbol{H}_{2^{q-k}}]$，对称复制方式的符号矩阵为 $[\boldsymbol{X}_{2^{q-k}}]$．两者均为正交矩阵．

在分析清楚对称复制情况下矩阵结构后，仿照平移复制情况的证明不难得到定理 3 的 3 个结论．下面仅给予简要证明．

（1）写成分块矩阵形式后计算可得

$$\boldsymbol{A}^* \times \left(\boldsymbol{A}^*\right)^{\mathrm{T}} = \overline{\boldsymbol{A}}^* \times \left(\overline{\boldsymbol{A}}^*\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_{2^k} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{B}^* \times \left(\boldsymbol{B}^*\right)^{\mathrm{T}} = \overline{\boldsymbol{B}}^* \times \left(\overline{\boldsymbol{B}}^*\right)^{\mathrm{T}} = 2^k \times \boldsymbol{I}_{2^k} \tag{14}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} c_{ik}c_{jk}\right)\boldsymbol{B}^* \times (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{k=1}^{m} c_{ik}c_{jk}\right)\boldsymbol{A}^* \times (\boldsymbol{B}^*)^{\mathrm{T}} = 0 \tag{15}$$

（2）略．

（3）同样利用分组证明的思想，唯一不同的是具体列的序号有所不同，表示相对比较烦琐，这里不再繁述．

证毕．

推论 3 当 $k=1$ 且 $\min\{\mathrm{card}(M_Z^A),\ \mathrm{card}(M_C^B)\}=1$ 时，杂交桥函数 $\boldsymbol{Z}$ 任意两个的互相关函数在零点的绝对值不超过 1．

小结 由定理 3 知，杂交桥函数矩阵的行向量相互正交；列向量中零元素的个数相同，且若将所有列向量按一定规则等分成一些组，组数和初始矩阵的阶数相同，则不同组的任何两个列向量正交，即可以从杂交桥函数中挑选和初始矩阵阶数相同个数的两两正交序列族．同组内列向量内积的取值范围和初始矩阵的阶数及杂交函数矩阵的相似度都有

很大关系，一般来说初始矩阵阶数越小，和父母矩阵中某一个相似度越小，内积的取值更接近零，也就是越接近正交.

由定理1不难得到定理3中杂交桥函数矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 的个数为 $2^{2^{q-k}}$，和结论2中桥函数矩阵个数相比极大扩充了函数序列的研究范围. 同时由定理3可知杂交桥函数序列中零的个数可以灵活调整，改善了结论1中对桥函数序列中零的个数的束缚.

4 结论与展望

文章提出一种新型三值函数—杂交桥函数概念，并给出了其简单性质，同时在数学上给予严格的证明，初步建立了杂交桥函数理论体系，完善和发展桥函数理论的同时为其进一步应用于通信系统提供了重要参考. 研究结果表明：这种杂交方式能够灵活调整现有桥函数序列中零的个数，且当父母矩阵的初始矩阵阶数和杂交矩阵相似度满足一定条件时杂交桥函数具有较好的正交特性，并且极大地扩充了函数序列的研究范围.

本文只给出了一种杂交方式和简单性质，关于其相关函数的性质有待进一步研究. 构造其他杂交生成方式并研究该方式下函数序列的性质也有待于进一步研究.

致谢 本文的研究工作得到了北京化工大学信息科学与技术学院张凤元教授的指导和帮助，在此表示感谢.

参 考 文 献

1 Hamuth HF 著，张其善等译. 序率理论基础与应用. 北京：人民邮电出版社，1980
2 Zhang QS, Li ZH. A new orthogonal multiplex system. In：ITC Proceedings, San Diego, September 28—30, 1982, 175—183
3 Li ZH, Zhang QS. Introduction to Bridge functions. IEEE Trans EMC, 1983, 25(4)：459—464
4 张其善，张凤元，杨东凯. 信息传输与正交函数. 北京：国防工业出版社，2008，145—187，112—116
5 Slimane BS, Abdullatif G. Multi-Carrier CDMA system using Bridge functions. In：IEEE 51st, VTC 2000-Spring Tokyo, Vol 3：1928—1932